

Universität-Gesamthochschule Paderborn

Automatisierungstechnik

Prof. Dr.-Ing. Joachim Lückel

***Formelsammlung zur Vorlesung:
Grundlagen der Regelungstechnik DII
WS 2000/2001***

Matrizenalgebra

I. Definition des Begriffs "Matrix"

Sind $m \cdot n$ Ausdrücke in einem rechteckigen Schema von m Zeilen und n Spalten angeordnet, so spricht man von einer Matrix vom Typ (m,n) , vom Format (m,n) oder kurz (m,n) -Matrix; die $m \cdot n$ Ausdrücke a_{ik} heißen *Elemente* der Matrix. Mit dem ersten Index wird jeweils eine horizontale Reihe des Schemas, eine **Zeile** bezeichnet, mit dem zweiten Index eine vertikale Reihe, eine **Spalte**:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sonderfälle

- $m = n$: Eine Matrix mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl heißt **quadratisch**.
- $n = 1$: Eine Matrix mit m Zeilen und einer Spalte heißt **Spaltenmatrix** oder **Spaltenvektor**.
- $m = 1$: Eine Matrix mit einer Zeile und n Spalten heißt **Zeilenmatrix** oder **Zeilenvektor**.

Diagonalelemente

Bei einer $n \cdot n$ -Matrix nennt man die a_{ii} ($i=1,2,\dots,n$) die **Diagonalelemente**. Sie bilden die Hauptdiagonale der Matrix $\underline{A}$.

Spur einer Matrix

Die Summe der Diagonalelemente wird auch die "Spur" der Matrix genannt:

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr } \underline{A}$$

Gleichheit von Matrizen

Zwei $m \cdot n$ -Matrizen $\underline{A}=(a_{ik})_{m,n}$ und $\underline{B}=(b_{ik})_{m,n}$ sind dann und nur dann gleich ($\underline{A}=\underline{B}$), wenn gilt:
 $a_{ik}=b_{ik}$ für alle $i=1..m$, $k=1..n$.

Nullmatrix

Eine Matrix $\underline{A}$ wird dann und nur dann **Null** genannt, wenn gilt: $a_{ik}=0$ für alle i, k .

Transponierte Matrix

Durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält man aus der Matrix $\underline{A}$ die **transponierte Matrix** $\underline{A}^T$. Es gilt außerdem:

$$(\underline{A}^T)^T = \underline{A}$$

Symmetrie von Matrizen

Eine quadratische Matrix heißt **symmetrisch**, wenn gilt: $\underline{A} = \underline{A}^T$ oder $a_{ik} = a_{ki}, \forall k, i$.

Sie heißt **schief-symmetrisch** oder **alternierend**, wenn gilt: $\underline{A} = -\underline{A}^T$ oder $a_{ik} = -a_{ki}, \forall k, i$.

Diagonalmatrix

Eine $n \cdot n$ -Matrix, bei der alle Elemente außer den Diagonalelementen gleich null sind, heißt **Diagonalmatrix**:

$$\underline{D} = \text{diag}(d_i)$$

Einheitsmatrix

Eine Diagonalmatrix, bei der alle Diagonalelemente gleich 1 sind, heißt **Einheitsmatrix**.

Submatrizen

Eine Matrix $\underline{A}$ lässt sich aufteilen in **Submatrizen**, die dann wieder als neue Elemente der Matrix $\underline{A}$ aufgefaßt werden können.

II. Rechenregeln:

Addition/Subtraktion von Matrizen:

Als **Summe (Differenz)** zweier $m \cdot n$ -Matrizen $\underline{A} = (a_{ik})_{m,n}$ und $\underline{B} = (b_{ik})$ bezeichnet man die $m \cdot n$ -Matrix:

$$\underline{C} = \underline{A} \pm \underline{B} = (c_{ik}) \quad \text{mit} \quad c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik}.$$

Nur Matrizen gleicher Reihenzahl m und Spaltenzahl n können addiert oder subtrahiert werden. Die Addition ist **kommutativ** und **assoziativ**, d.h.

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A} \quad \text{und} \quad \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C},$$

Skalarmultiplikation

Für das **Produkt** einer $m \cdot n$ -Matrix $\underline{A}$ mit einem **skalaren Wert** k gilt:

$$\underline{B} = k\underline{A} = \underline{A}k \quad \text{mit} \quad b_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

Matrizenmultiplikation

Unter dem **Produkt** ($\underline{A} \cdot \underline{B}$) einer $m \cdot n$ -Matrix $\underline{A}$ mit einer $n \cdot p$ -Matrix $\underline{B}$ versteht man eine $m \cdot p$ -Matrix $\underline{C}$, deren Elemente durch die skalaren Produkte

$$c_{ik} = \sum_{r=1}^n a_{ir} \cdot b_{rk} \quad \begin{cases} i = 1 \dots m \\ k = 1 \dots p \end{cases}$$

gebildet werden.

Sätze über **Matrizenmultiplikation**:

a) Im allgemeinen gilt: $\underline{A} \underline{B} \neq \underline{B} \underline{A}$,

d. h. das Matrizenprodukt ist nicht kommutativ. Es kommt darauf an, ob eine Matrix von rechts oder links mit einer zweiten Matrix multipliziert werden soll.

b) Weiter gilt:

$$(\underline{A} \underline{B}) \underline{C} = \underline{A} (\underline{B} \underline{C}) = \underline{A} \underline{B} \underline{C}$$

$$(\underline{A} + \underline{B}) \underline{C} = \underline{A} \underline{C} + \underline{B} \underline{C}$$

$$\underline{C} (\underline{A} + \underline{B}) = \underline{C} \underline{A} + \underline{C} \underline{B}$$

d. h. die Matrizenmultiplikation ist **assoziativ** und **distributiv**.

c) Für das **Transponieren von Produkten** gilt folgende wichtige Regel:

$$(\underline{A} \underline{B})^T = \underline{B}^T \underline{A}^T.$$

III. Matrizeninversion:

Definition der Inversen

Wenn zwei quadratische Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ existieren, so daß gilt:

$$\underline{A} \underline{B} = \underline{B} \underline{A} = \underline{E},$$

dann nennt man $\underline{B}$ die **Inverse** von $\underline{A}$ und schreibt:

$$\underline{B} = \underline{A}^{-1}.$$

Rechenregeln

Wenn $\underline{A}$ und $\underline{B}$ zwei quadratische Matrizen der gleichen Ordnung mit den Inversen $\underline{A}^{-1}$ und $\underline{B}^{-1}$ sind, dann gilt:

$$(\underline{AB})^{-1} = \underline{B}^{-1} \underline{A}^{-1}.$$

Determinante einer Matrix

Jeder quadratischen Matrix ist eine aus ihren Elementen berechenbare Zahl zugeordnet, nämlich die **Determinante** von $\underline{A}$:

$$\det(\underline{A})$$

Algebraisches Komplement

Als **algebraisches Komplement (Kofaktor)** A_{ik} des Elements a_{ik} bezeichnet man die Unterdeterminante, die man nach Streichung der i-ten Zeile und k-ten Spalte einer $n \cdot n$ -Matrix berechnet und mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+k}$ versieht.

Adjungierte Matrix

Die aus den Kofaktoren A_{ik} in transponierter Form gebildete Matrix $\underline{A}_{adj}$ nennt man die zu $\underline{A}$ **adjungierte Matrix**.

Berechnung der Inversen

Aus der Beziehung $\underline{A} \underline{A}_{adj} = \underline{A}_{adj} \underline{A} = \det(\underline{A}) \underline{E}$ läßt sich die zu $\underline{A}$ **inverse Matrix** berechnen:

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\underline{A}_{adj}}{\det(\underline{A})}$$

Existenz der Inversen

Notwendige und hinreichende Bedingung für die **Existenz der inversen Matrix** $\underline{A}^{-1}$ ist damit:

$$\det(\underline{A}) \neq 0.$$

Singularität einer Matrix

Eine quadratische Matrix wird **singulär** genannt, wenn die Bedingung $\det(\underline{A})=0$ gilt, anderenfalls **nichtsingulär** oder **regulär**.



Laplace-Integral

inverses Laplace-Integral

$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) \cdot e^{st} \cdot ds$
--	---

Rechenregeln der Laplace-Transformation

Benennung der Operation	Operation der Zeitfunktion	Operation der Bildfunktion
Linearkombination der Originalfunktion	$c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)$ c_1, c_2 beliebig	$c_1 \cdot F_1(s) + c_2 \cdot F_2(s)$
Verallgemeinerte Differentiation der Originalfunktion	$\frac{d}{dt} f(t)$ $\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$s \cdot F(s) - f(-0)$ $s^n \cdot F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(-0) \cdot s^{n-k-1}$
Integration der Originalfunktion	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
Streckung der Originalfunktion	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Verschiebung der Originalfunktion	$f(t - \tau)$ mit $\tau \geq 0$	$e^{-s\tau} \cdot F(s)$
Dämpfung der Originalfunktion	$f(t) \cdot e^{at}$	$F(s - a)$
Faltung der Originalfunktion	$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Differentiation der Bildfunktion	$(-t)^n \cdot f(t)$	$\frac{d^n}{ds^n} F(s)$
Anfangswertsatz	$f(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$	<u>Bedingung:</u> Grenzwert von $f(t)$ muß existieren $\Rightarrow$ System stabil
Endwertsatz	$f(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$	

Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Zeitbereich $f(t)$	Bildbereich $F(s)$
$\delta(t)$ Impuls	1
$\sigma(t)$ Sprung	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at} , a auch komplex	$\frac{1}{s+a}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a) \cdot (s+b)}$
$\frac{1}{ab} + \frac{e^{-at}}{a(a-b)} - \frac{e^{-bt}}{b(a-b)}$	$\frac{1}{s(s+a) \cdot (s+b)}$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$t \cdot \sin(\omega_0 t)$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
$e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
$\sin^2(\omega_0 t)$	$\frac{2\omega_0^2}{s(s^2 + 4\omega_0^2)}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
$t \cdot \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
$e^{-at} \cdot \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
$1 - \cos(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0^2}{s(s^2 + \omega_0^2)}$
$A \cdot e^{-at} \cdot \cos(\omega_0 t + \psi)$ $A = \sqrt{B^2 + (Ba - C)^2} / \omega_0^2$ $\tan \psi = \frac{(Ba - C)}{B\omega_0}$	$\frac{Bs + C}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$ mit $B > 0$

Kenngrößen von Systemen 2. Ordnung

Differentialgleichung:

allgemeine Darstellung: $a_2 \ddot{x}_a(t) + a_1 \dot{x}_a(t) + a_0 x_a(t) = b_0 x_e(t)$

normierte Darstellung: $T^2 \ddot{x}_a(t) + 2\zeta T \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K x_e(t)$ mit $T = \frac{1}{\omega_n}$

Eigenwerte:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} && \text{allgemein} \\ &= -\zeta \omega_n \pm \omega_n i \sqrt{1 - \zeta^2} && \text{für } \zeta < 1 \\ &= \alpha \pm i \omega_{\text{eig}}\end{aligned}$$

Hierbei bedeuten:

- $\zeta[-]$ = Dämpfungskonstante, Dämpfungsgrad oder Lehrsches Dämpfungsmaß (in der Literatur auch mit "D" bezeichnet)
 $\zeta < 1$: periodische Schwingung
 $\zeta = 1$: aperiodischer Grenzfall
 $\zeta > 1$: aperiodischer Fall
- $\alpha[1/s]$ = Abklingkonstante (=Realteil des komplexen Eigenwertes)
- $\omega_n[\text{rad/s}]$ = Eigenfrequenz des **ungedämpften** Systems (=Abstand des komplexen Eigenwertes vom Nullpunkt)
- $\omega_{\text{eig}}[\text{rad/s}]$ = Eigenfrequenz des (mit ζ) **gedämpften** Systems (=Imaginärteil des komplexen Eigenwertes)

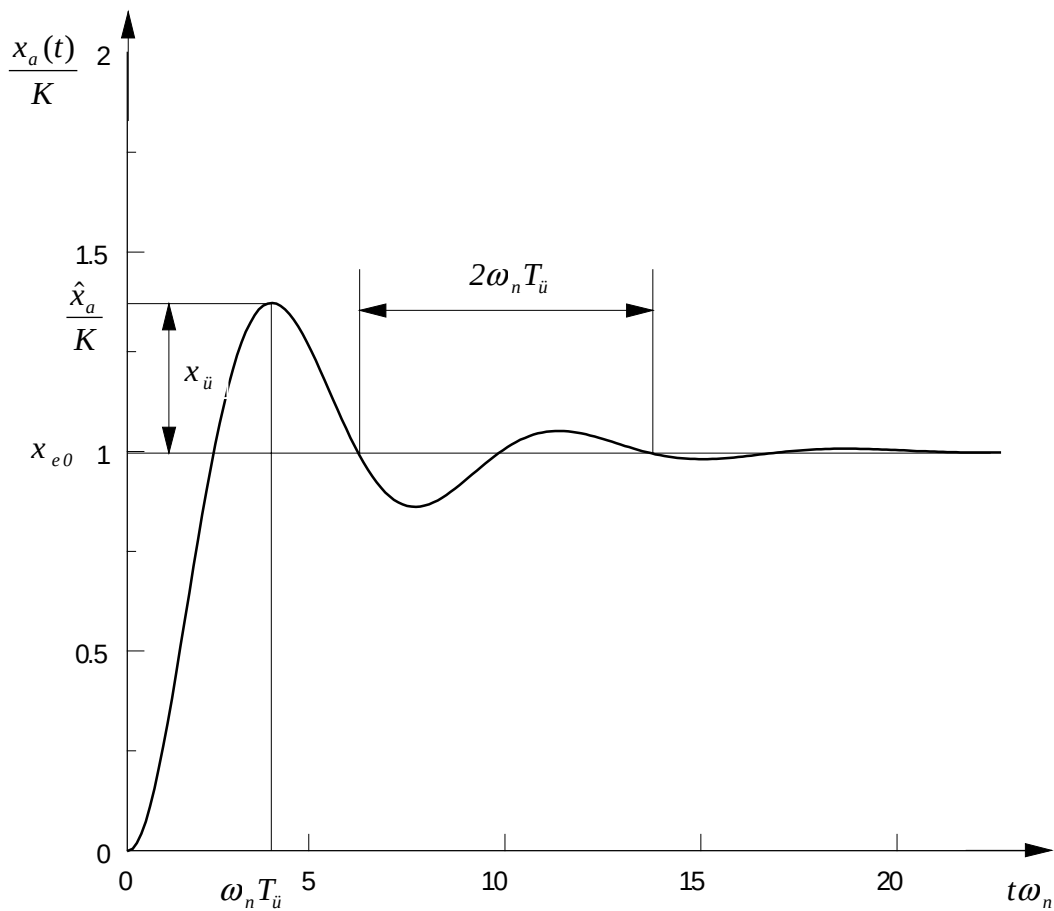
Sprungantwort

(Übertragungsfunktion, Lösung der Differentialgleichung auf einen Eingangssprung der Höhe x_{eo}):

$$\begin{aligned}x_a(t) &= K x_{eo} \left[1 - e^{\alpha t} \cdot \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\omega_{\text{eig}}^2}} \cdot \sin(\omega_{\text{eig}} t + \psi) \right] \\ \text{bzw. } x_a(t) &= K x_{eo} \left[1 - e^{-\zeta \omega_n t} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \zeta^2}} \cdot \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t + \psi) \right] \\ \text{mit } \tan \psi &= -\frac{\omega_{\text{eig}}}{\alpha} = \frac{1}{\zeta} \sqrt{1 - \zeta^2}\end{aligned}$$

Meßtechnische Kenngrößen eines Systems 2. Ordnung

Normierte Darstellung der Sprungantwort



Zeit bis zum ersten Überschwingen:

$$T_{\ddot{u}} = \frac{\pi}{\omega_{eig}} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Maximaler Schwingungsausschlag:

$$\hat{x}_a = K x_{e0} \left(1 + e^{\frac{\alpha \pi}{\omega_{eig}}} \right)$$

Überschwingweite:

$$x_{\ddot{u}} = \frac{\hat{x}_a}{K} - x_{e0} = x_{e0} \cdot e^{\frac{\alpha \pi}{\omega_{eig}}} \quad (\text{auf K bezogene Überschwingweite})$$

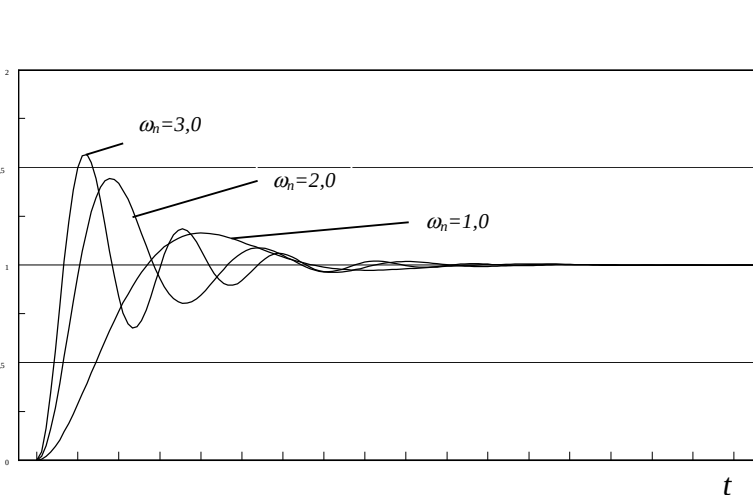
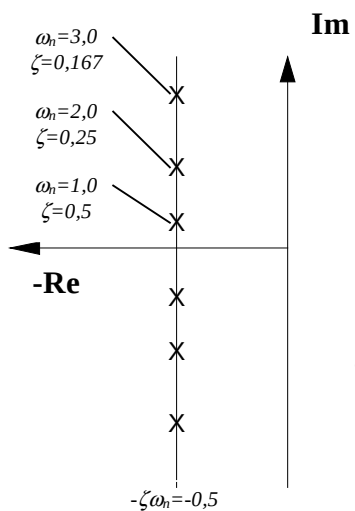
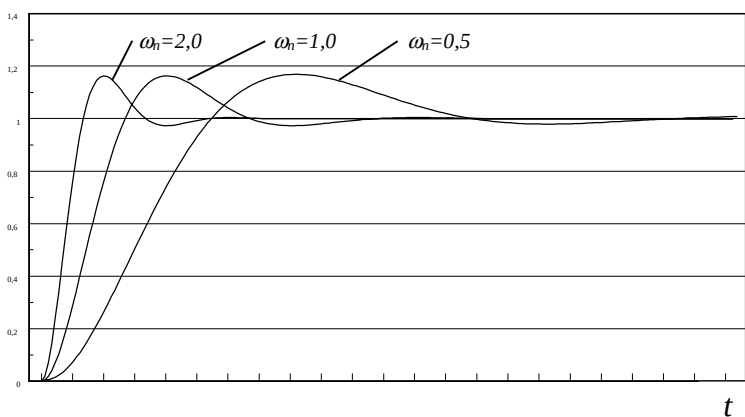
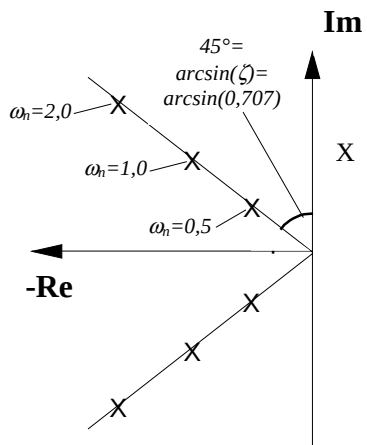
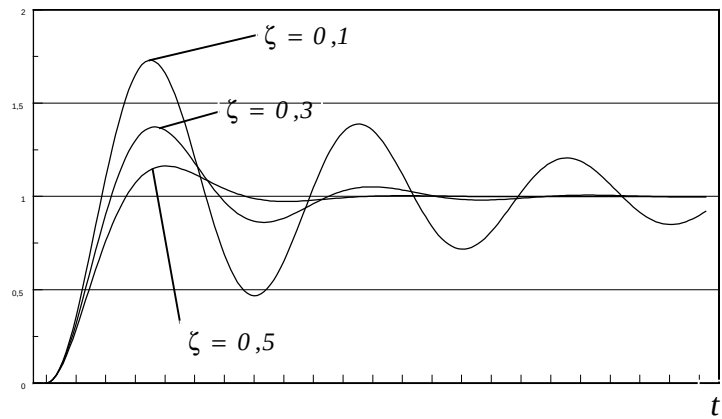
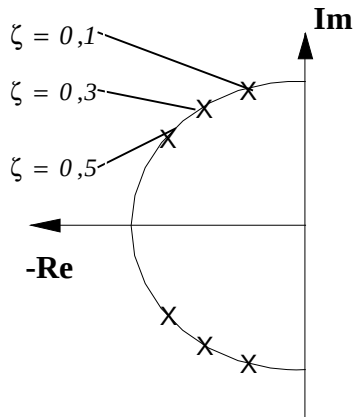
$$\hat{x}_{\ddot{u}} = K \cdot x_{\ddot{u}} \quad (\text{absolute Überschwingweite})$$

Überschwingweite (bezogen auf den Eingangssprung in %):

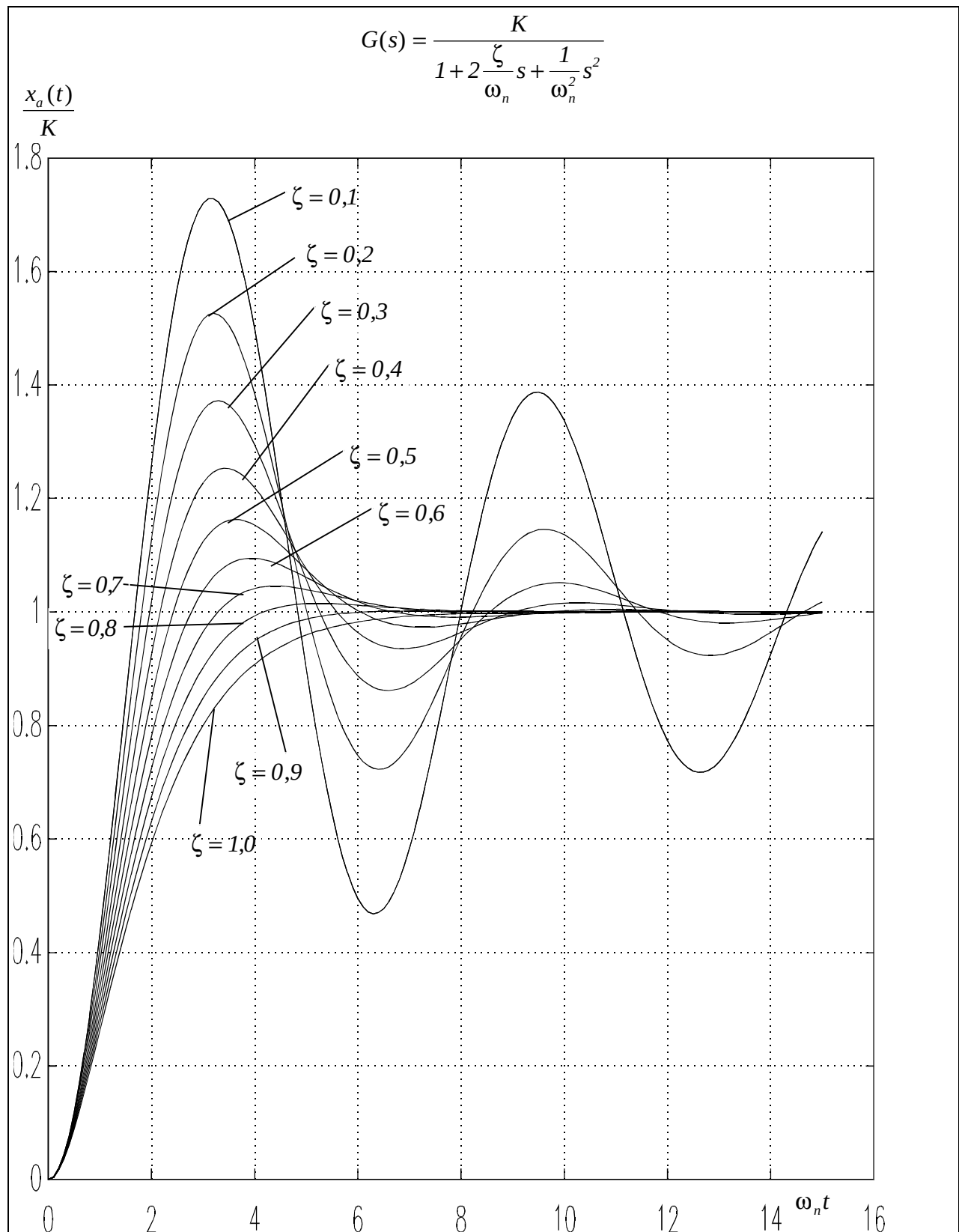
$$\tilde{x}_{\ddot{u}} = \frac{\frac{\hat{x}_a}{K} - x_{e0}}{x_{e0}} \cdot 100\% = e^{\frac{\alpha \pi}{\omega_{eig}}} \cdot 100\%$$

Pollage und Einschwingverhalten eines Systems 2. Ordnung

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



Sprungantworten eines Systems 2. Ordnung (in normierter Darstellung)



Stabilität

Definition:

Ein lineares zeitinvariantes Übertragungsglied heißt **stabil**, wenn seine Sprungantwort mit wachsender Zeit einem endlichen Wert zustrebt.

Grundlegendes Stabilitätskriterium:

Ein rationales Übertragungsglied ist genau dann stabil, wenn die Pole (Nullstellen der charakteristischen Gleichung) seiner Übertragungsfunktion sämtlich links der imaginären Achse der komplexen Ebene liegen.

Algebraisches Stabilitätskriterium:

a) Notwendige Bedingung (**Vorzeichenbedingung**):

Wenn ein rationales Übertragungsglied stabil ist, dann sind alle Koeffizienten a_i seiner charakteristischen Gleichung

$$N(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

größer als Null. (Übertragungsglied stabil $\Rightarrow a_i > 0$ für alle $i = 0..n$)

Achtung: Dies ist eine notwendige Bedingung! D. h. sind alle Koeffizienten a_i größer als Null, muß das rationale Übertragungsglied nicht zwangsläufig stabil sein. ($a_i > 0$ für alle $i = 0..n \nRightarrow$ Übertragungsglied stabil)

Ist mindestens einer der Koeffizienten der charakteristischen Gleichung kleiner oder gleich Null, so ist das rationale Übertragungsglied instabil, da zumindest eine Polstelle auf oder rechts der imaginären Achse liegt. ($a_i \leq 0$ für mindestens ein $i \Rightarrow$ Übertragungsglied instabil)

b) Notwendige und hinreichende Bedingung (**Hurwitz-Kriterium**):

Ein rationales Übertragungsglied n-ter Ordnung mit der charakteristischen Gleichung

$$N(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad \text{mit } a_n > 0$$

ist genau dann stabil, wenn sämtliche Hauptabschnittsdeterminanten $H_1, H_2, \dots, H_n$ der Matrix

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\ \cdot & \cdot & a_n & a_{n-2} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}, \quad a_m = 0 \text{ für } m < 0$$

positiv sind.

Stabilität, Beispiele, Hurwitz-Kriterium

System **1.Ordnung**: ($n=1$), $N(s) = a_1 s + a_0$

$$H = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad H_1 = a_0$$

$$\text{Bedingung für Stabilität} \quad \begin{cases} a_n = a_1 > 0 \\ H_1 = a_0 > 0 \end{cases}$$

System **2.Ordnung**: ($n=2$), $N(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} H_1 &= a_1, \\ H_2 &= a_1 a_0 \end{aligned}$$

$$\text{Bedingung für Stabilität} \quad \begin{cases} a_n = a_2 > 0 \\ H_1 = a_1 > 0 \\ H_2 = a_1 a_0 > 0 \rightarrow a_0 > 0 \end{cases}$$

System **3.Ordnung**: ($n=3$), $N(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

$$H = \begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} H_1 &= a_2, \\ H_2 &= a_2 a_1 - a_0 a_3, \\ H_3 &= a_0 H_2 \end{aligned}$$

$$\text{Bedingung für Stabilität} \quad \begin{cases} a_n = a_3 > 0 \\ H_1 = a_2 > 0 \\ H_2 = a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0 \\ H_3 = a_0 H_2 > 0 \rightarrow a_0 > 0 \end{cases}$$

System **4.Ordnung**: ($n=4$), $N(s) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

$$H = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} H_1 &= a_3, \\ H_2 &= a_3 a_2 - a_1 a_4, \\ H_3 &= a_1 H_2 - a_0 a_3^2, \\ H_4 &= a_0 H_3 \end{aligned}$$

$$\text{Bedingung für Stabilität} \quad \begin{cases} a_n = a_4 > 0 \\ H_1 = a_3 > 0 \\ H_2 = a_3 a_2 - a_1 a_4 > 0 \\ H_3 = a_1 H_2 - a_0 a_3^2 > 0 \\ H_4 = a_0 H_3 > 0 \rightarrow a_0 > 0 \end{cases}$$

Frequenzgang eines Systems 2. Ordnung (Ortskurve)

Differentialgleichung:

$$\ddot{x}_a + 2z\omega_n \dot{x}_a + \omega_n^2 x_a = \omega_n^2 x_e$$

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2z\omega_n s + \omega_n^2}$$

Ortskurve:

mit $u = \frac{\omega}{\omega_n}$

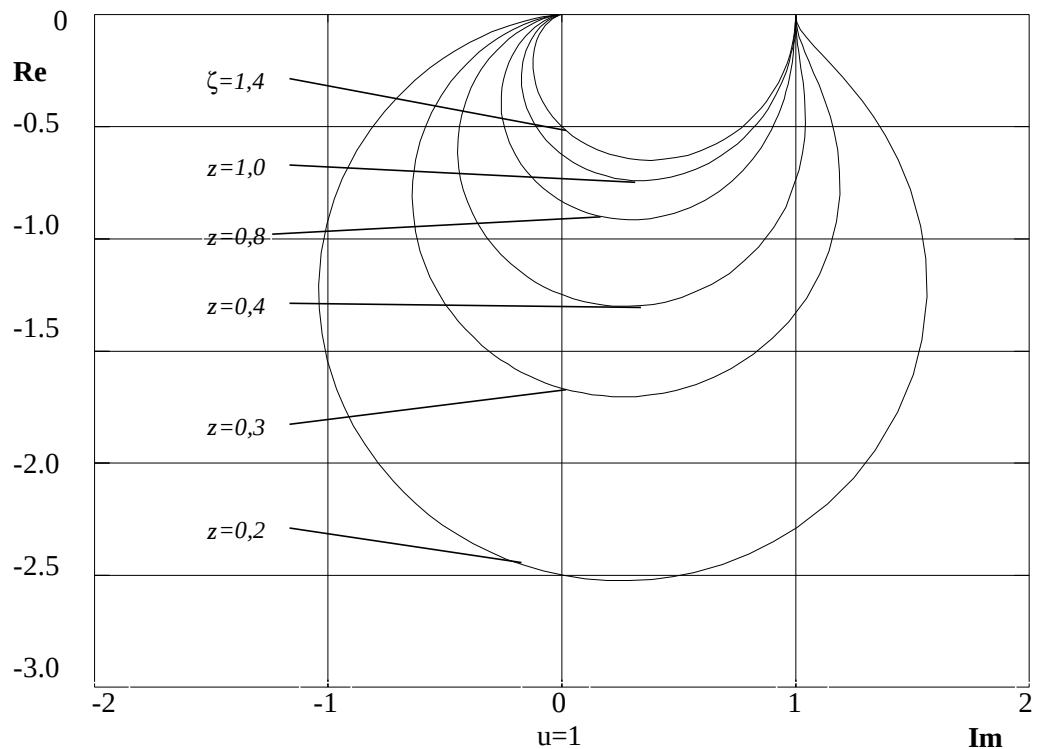
$$\begin{aligned} \text{Realteil:} & \quad \frac{(1-u^2)}{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2} \\ \text{Imaginärteil:} & \quad \frac{-2\zeta u}{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2} \end{aligned}$$

Frequenzgang:

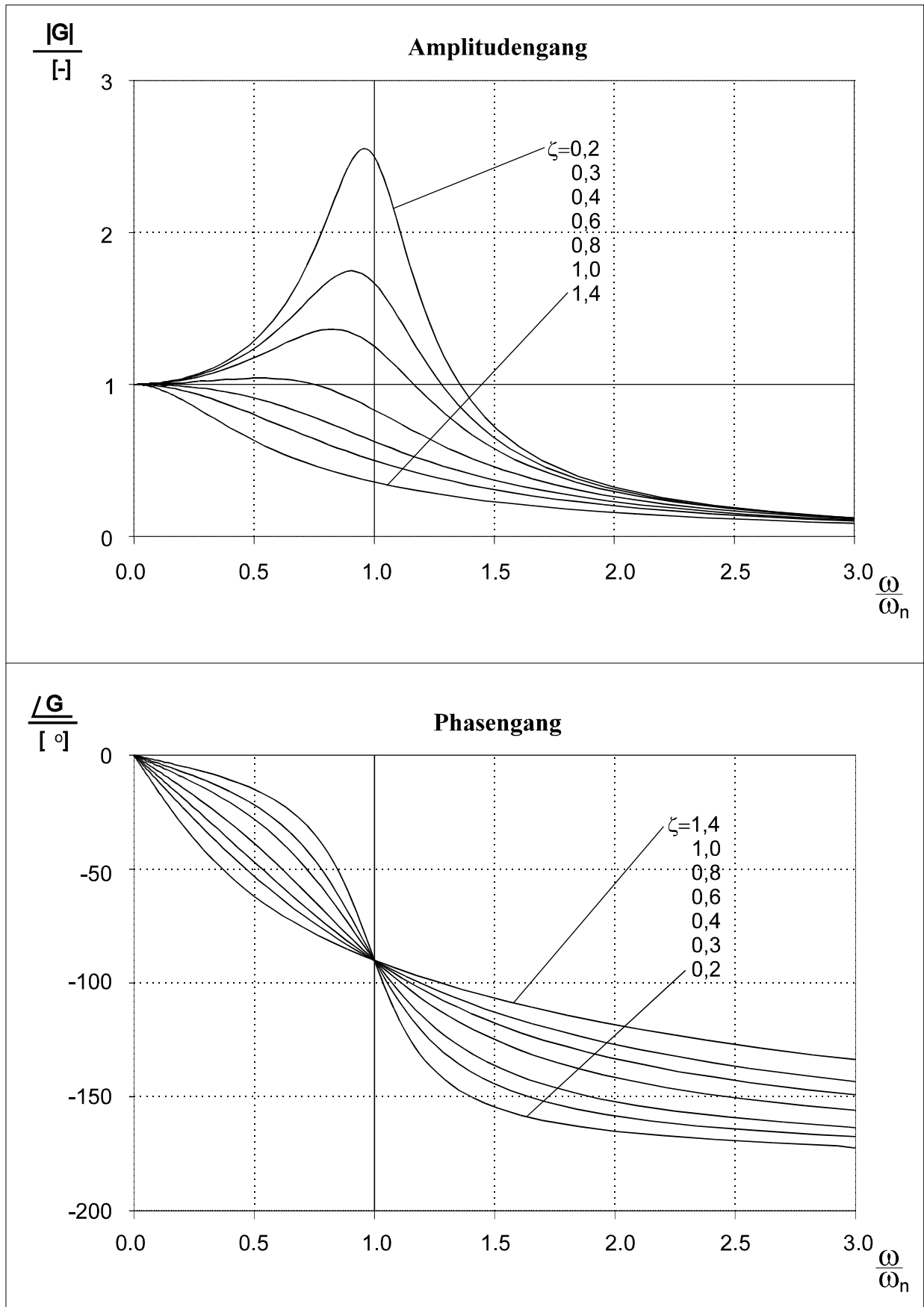
$$\begin{aligned} \text{Amplitudengang:} & \quad A = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2}} \\ \text{Phasengang:} & \quad F = \arctan\left(-\frac{2\zeta u}{1-u^2}\right) \end{aligned}$$

Resonanzfrequenzgang:

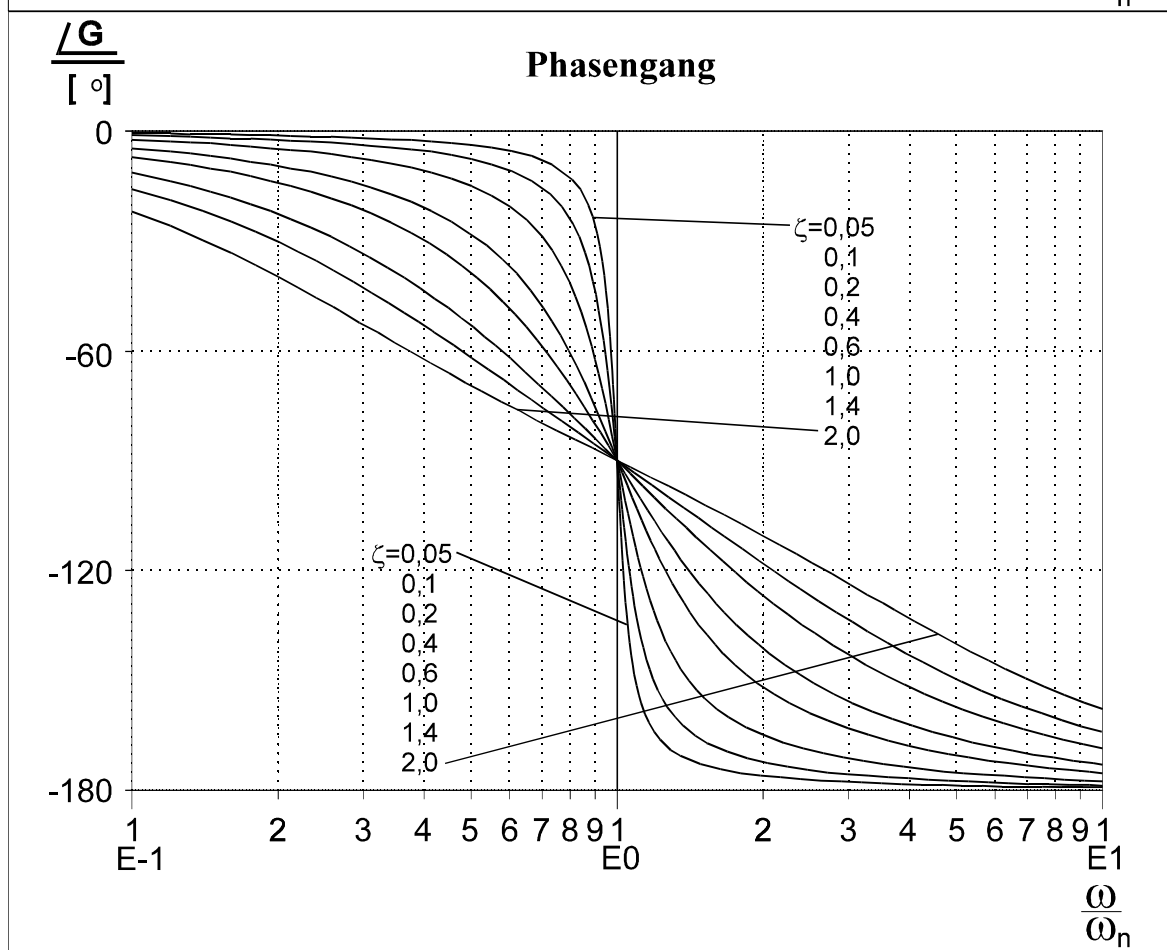
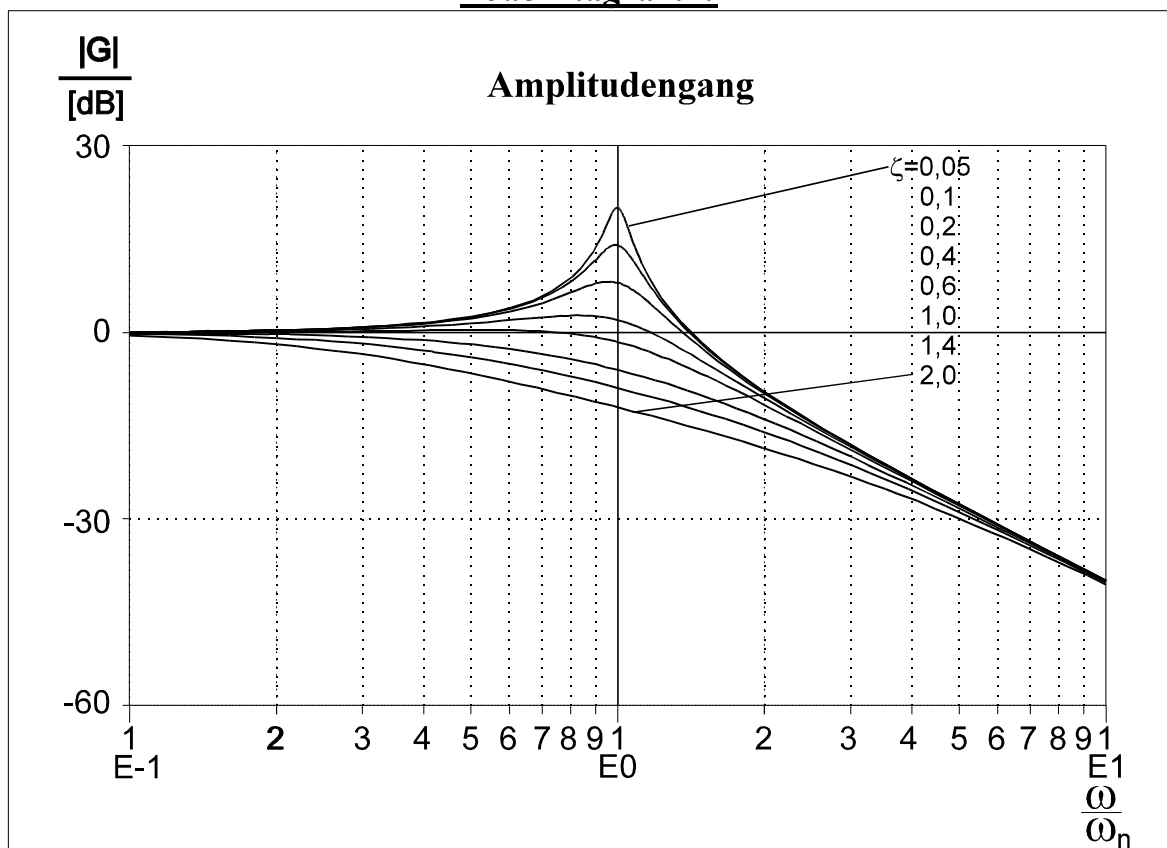
$$u_{Rf} = \frac{\omega_{Rf}}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$



Frequenzgang eines Systems 2. Ordnung (Amplituden- und Phasengang)



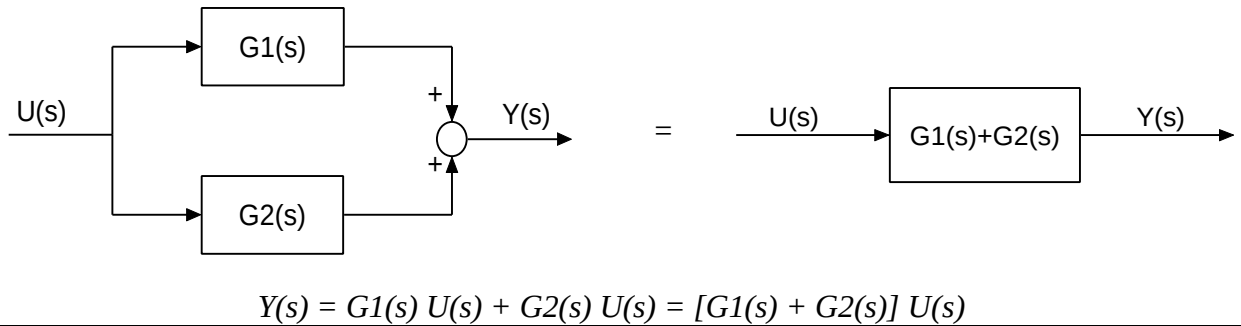
Frequenzgang eines Systems 2. Ordnung (Amplituden- und Phasengang)
Bode Diagramm



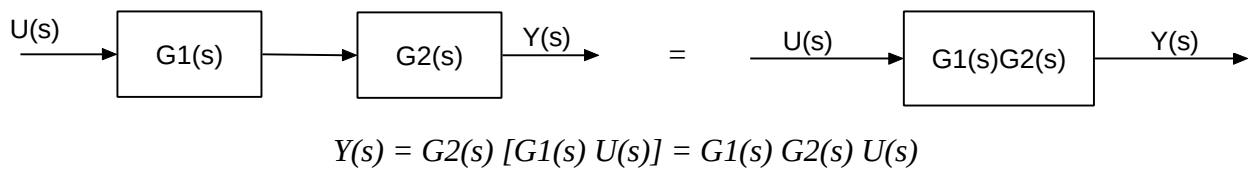
Umformung von Blockschaltbildern

Zusammenfassungsregeln

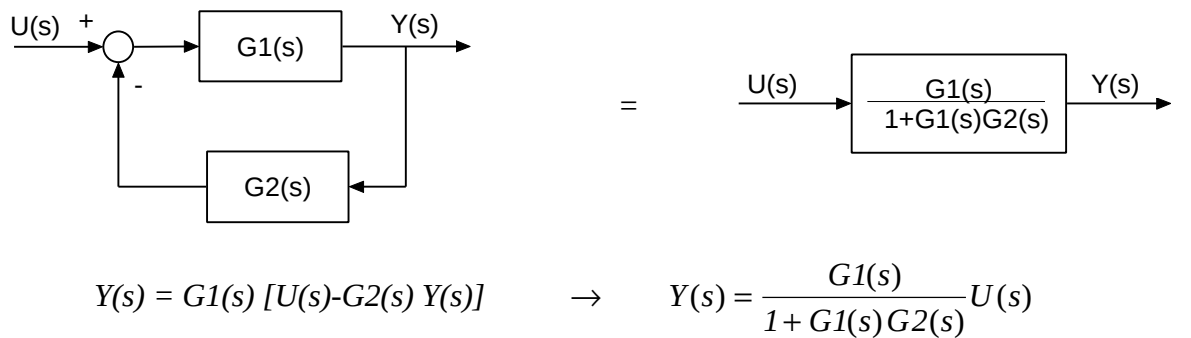
Parallelschaltung



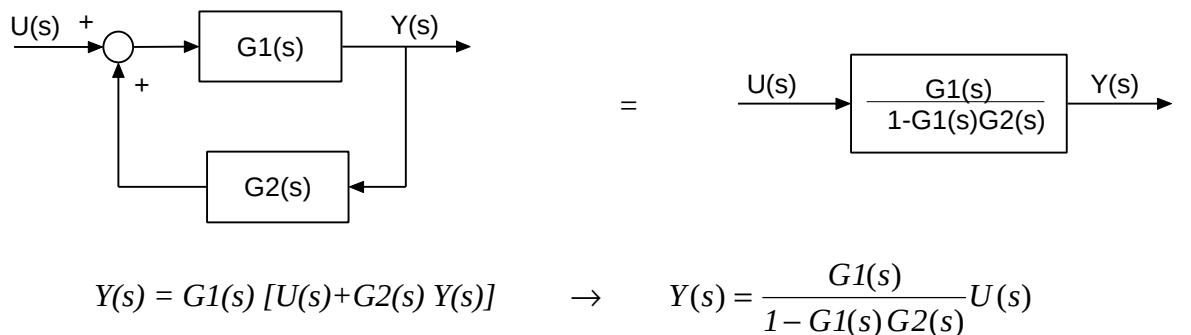
Reihenschaltung



Gegenkopplung

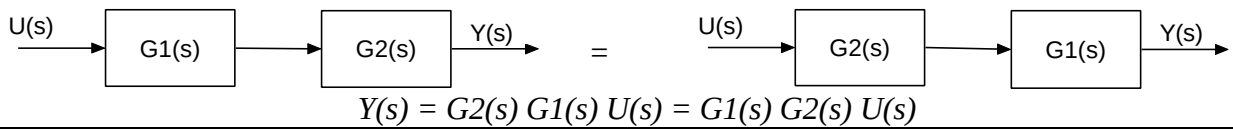


Mitkopplung

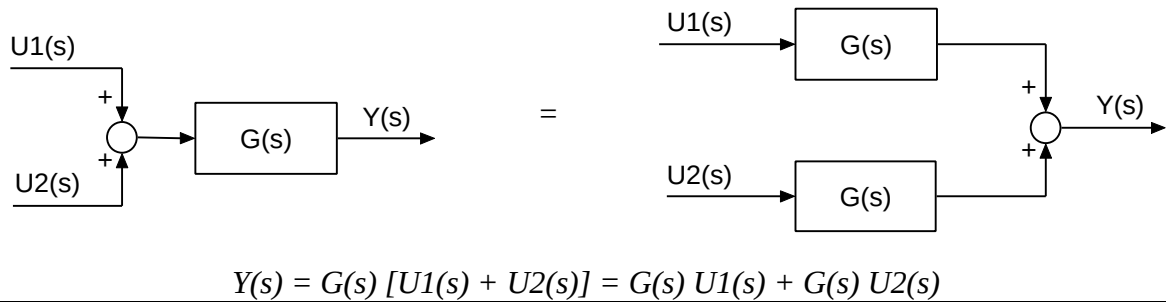


Vertauschungsregeln

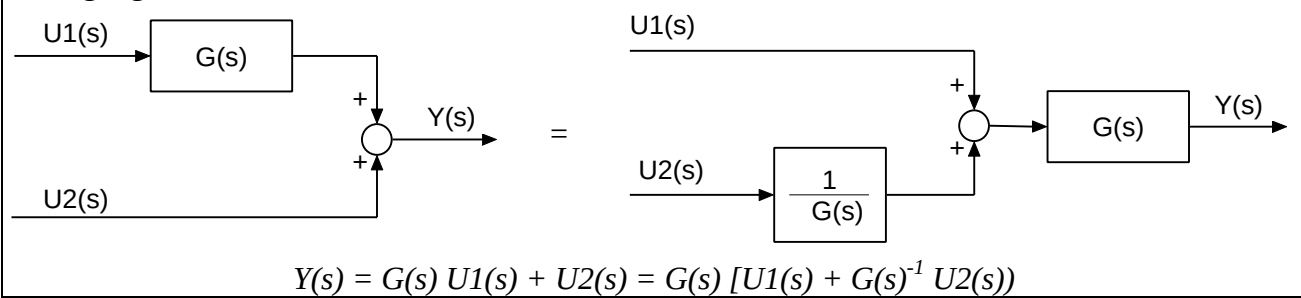
Vertauschung zweier Blöcke



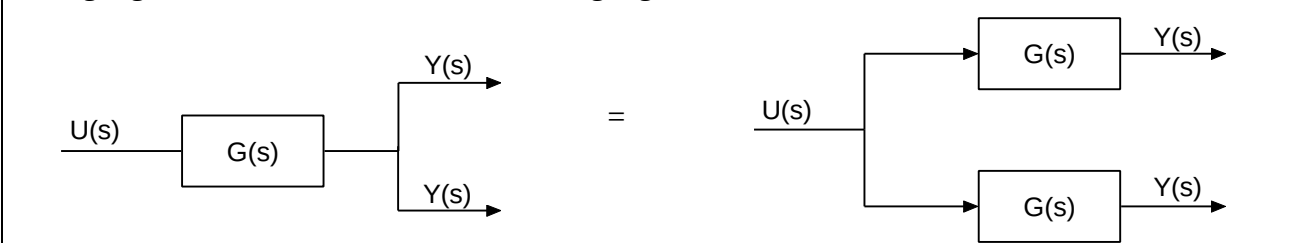
Verlegung eines Blockes vor eine Summationsstelle



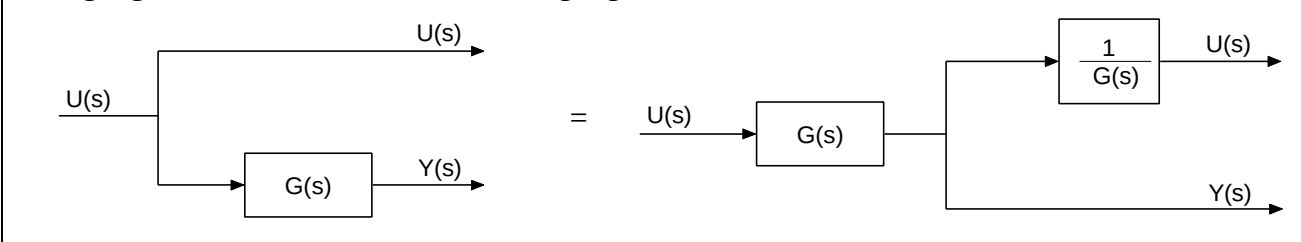
Verlegung eines Blockes hinter eine Summationsstelle



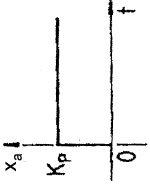
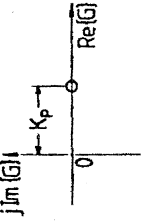
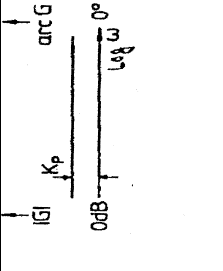
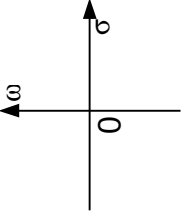
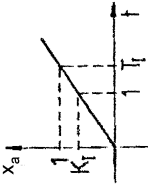
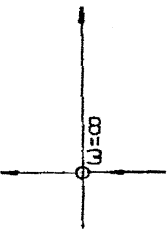
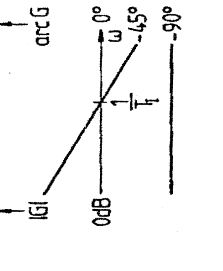
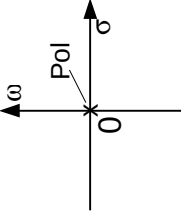
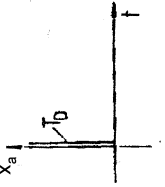
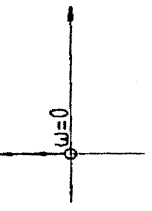
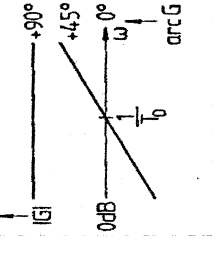
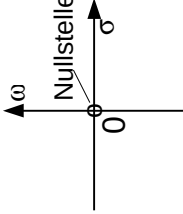
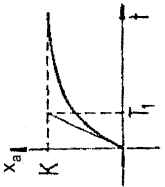
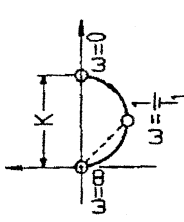
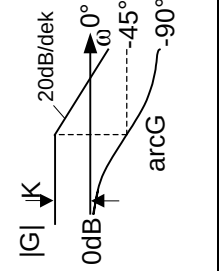
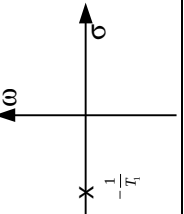
Verlegung eines Blockes hinter eine Verzweigungsstelle



Verlegung eines Blockes vor eine Verzweigungsstelle

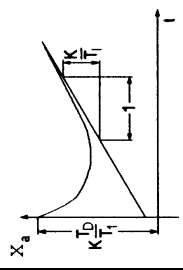
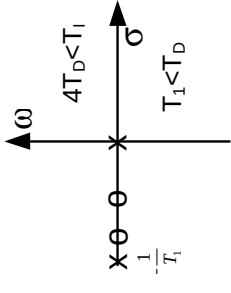


Verhalten wichtiger Regelkreisglieder

Glied / System	DGL im Zeit- und Bildbereich	Strungantwort	Ortskurve	Bodediagramm	Pole (x) und Nullstellen (o) in der s-Ebene
P	$x_a(t) = K_P x_e(t)$ $G(s) = K_P$				
I	$x_a(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t x_e(t) dt$ $G(s) = \frac{1}{T_I s}$				
D	$x_a(t) = T_D \frac{dx_e(t)}{dt}$ $G(s) = T_D s$				
PT ₁	$T_I \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K x_e(t)$ $G(s) = K \frac{1}{1 + T_I s}$				

PT ₂ - zwei reelle Nullstellen	$T_1 T_2 \ddot{x}_a(t) + (T_1 + T_2) \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K x_e(t)$ $G(s) = K \frac{1}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$				
PT ₂ - zwei komplexe Nullstellen	$T_0^2 \ddot{x}_a(t) + 2\zeta T_0 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K x_e(t)$ $G(s) = K \frac{1}{T_0^2 s^2 + 2\zeta T_0 s + 1}$				
PI	$x_a(t) = K_p \left[x_e(t) + \frac{1}{T_n} \int_0^t x_e(t) dt \right]$ $G(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_n s} \right)$				
PD	$x_a(t) = K_p \left[x_e(t) + T_D \frac{dx_e(t)}{dt} \right]$ $G(s) = K_p (1 + T_D s)$				
IT ₁	$T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t x_e(t) dt$ $G(s) = \frac{1}{T_I s (1 + T_I s)}$				

DT ₁	$T_I \dot{x}_a(t) + x_a(t) = T_D \frac{dx_e(t)}{dt}$ $G(s) = \frac{T_D s}{(1 + T_I s)}$				
PID	$x_a(t) = K \left[x_e(t) + T_D \frac{dx_e(t)}{dt} + \frac{1}{T_I} \int_0^t x_e(t) dt \right]$ $G(s) = K \left(1 + T_D s + \frac{1}{T_I s} \right)$				
PIT ₁	$T_I \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K \left[x_e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t x_e(t) dt \right]$ $G(s) = K \frac{1}{(1 + T_I s)}$				
PDT ₁	$T_I \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K_P \left[x_e(t) + T_D \frac{dx_e(t)}{dt} \right]$ $G(s) = K_P \frac{1 + T_D s}{1 + T_I s}$				

PIDT ₁	$T_I \dot{x}_a(t) + x_a(t) =$ $K \left[x_e(t) + T_D \frac{dx_e(t)}{dt} + \frac{1}{T_I} \int_0^t x_e(t) dt \right]$ $G(s) = K \frac{1 + T_D s + \frac{1}{T_I s}}{(1 + T_I s)}$				
T _t	$x_a(t) = Kx_e(t - T_t)$ $G(s) = Ke^{-sT_t}$	